LINKÖPINGS UNIVERSITET
ITN, Campus Norrköping
Univ lekt George Baravdish

Lösningaförslag till tentamen i Flervariabelanalys, TNIU73, 2004-10-19

---

1. (a) Gränsvärdet är 1 längs x-axeln och -1 längs y-axeln. Alltså existerar ej gränsvärdet.

   (b) Med polära koordinater $x = r\cos\theta$ och $y = r\sin\theta$, fås

$$\frac{x^2y}{x^2+y^2} = \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = r\cos^2\theta\sin\theta \to 0,\ r \to 0.$$

   Gränsvärdet existerar och är lika med 0.

2. (a) Antingen delar vi upp området och integrerar enligt

$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x} x\,dydx + \int_{x=1}^{x=2}\int_{y=0}^{y=2-x} x\,dydx = \frac{1}{3},$$

   eller

$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=2-y} x\,dxdy = \frac{1}{3}.$$

   (b) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{r=1} r\cos\theta\cdot r\,drd\theta = \frac{1}{3}.$

3. Att punkten $(2,1,6)$ ligger i planet inses lätt. Punkten ligger dessutom på ytan $z = f(x,y) = ax^2 + by^2$ om $4a + b = 6$. Vidare gäller att normalen och gradienten är parallella i tangeringspunkten, dvs

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f'_x(2,1) \\ f'_y(2,1) \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4a \\ 2b \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

   Alltså ges ytan av $z = x^2 + 2y^2$.

4. Vi bestämmer först de stationära punkterna genom att lösa systemet $f'_x(x,y) = y(3x^2 + y^2 - 4) = 0$ och $f'_x(x,y) = x(x^2 + 3y^2 - 4) = 0$. Vi får följande fall. Fall 1:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 3y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

   Nollställena är $(0,0)$, $(\pm1,0)$. Dock är $(0,0)$ den enda stationära punkten innanför enhetscirkeln och där är $f(0,0) = 0$. Fall 2:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} 3x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ x^2 + 3y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ y = \pm x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm x \end{cases}$$

Nollställena är $(0, \pm 2)$, $(\pm 1, \pm 1)$. Dock är ingen innanför enhetscirkeln. Härnäst undersöker vi randen:

$$f(\cos\theta, \sin\theta) = -3\cos\theta\sin\theta = -\frac{3}{2}\sin 2\theta.$$

f:s största och minsta värde på randen är $\frac{3}{2}$ respektive $-\frac{3}{2}$. Detta ger att $\frac{3}{2}$ respektive $-\frac{3}{2}$ är fs största respektive minsta värde.

5. Vi har att $u = x + y$ och $v = x$. Detta ger att

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$$

och

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Vidare

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}$$

och

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}.$$

Blandade derivatan ges av

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$$

Insatt i ekvationen blir ekvationen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial v} = g(u) \Leftrightarrow z = vg(u) + f(u) \Leftrightarrow z(x,y) = xg(x+y) + f(x+y).$$

6. Ett klot med centrum i origo och radie 2 har ekvationen $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
Låt $D_{xy} = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ vara hålets tvärsnittsyta i xy-planet. Ett lämpligt variabelbyte här är polära koordinater på formen $x = r(\theta)\cos\theta$ och $y = r(\theta)\sin\theta$, där $r(\theta) = 2\cos\theta$ och $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Funktionaldeterminanten är r. Hålets volym ges således av

$$\begin{aligned}
\iint_{D_{xy}} \int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}} 1\, dzdxdy &= 2\iint_{D_{xy}} \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=2\cos\theta} \sqrt{4-r^2}r\, drd\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=2\cos\theta} \sqrt{4-r^2}r\, drd\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}\Big[(4-r^2)^{3/2}\Big]_0^{2\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4^{3/2} - (4 - 4\cos^2\theta)^{3/2}\, d\theta = \frac{4}{3}4^{3/2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta)\, d\theta \\
&= \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{4}\sin 3\theta - \frac{3}{4}\sin\theta\right) d\theta \\
&= \frac{32}{3}\Big[\theta - \frac{1}{12}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16(3\pi-4)}{9} \text{ v.e.}
\end{aligned}$$

Volymen hos den kropp som uppstår efter det att hålets har borrats ut ges av

$$\frac{4\pi 2^3}{3} - \frac{16(3\pi - 4)}{9} = \frac{4(12\pi + 1)}{9} \text{ v.e.}$$