LINKÖPINGS UNIVERSITET
ITN, Campus Norrköping
Univ lekt George Baravdish

Lösningaförslag till tentamen i Flervariabelanalys, TNIU73, 2005-01-11

---

1. I tangeringspunkterna måste normalen $\nabla f = (-f'_x, -f'y, 1)^t$ till ytan $z = f(x,y)$ och normalen $\boldsymbol{n} = (2,1,-1)^t$ till planet vara parallella, dvs $\nabla f = \lambda \boldsymbol{n}$, dvs

$$\begin{cases} -2+2x+2y &= 2\lambda \\ 2x-3y^2 &= \lambda \\ 1 &= -\lambda \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -1.$$

Punkterna är därmed $(-1/3, 1/3, -14/27)$ respektive $(1,-1,2)$.

2. (a) T.ex. så ger integration i y-led först att

$$\iint_D y\,dxdy = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x^2}^{y=x} y\,dydx = \frac{1}{15},$$

(b) $$\iint_D x\,dxdy = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^{r=1} r\cos\theta \cdot r\,drd\theta = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

3. Vi bestämmer först de stationära punkterna genom att lösa systemet

$$\begin{cases} f'_x(x,y) &= y(1-x^2)e^{-(x^2+y^2)/2} &= 0 \\ f'_y(x,y) &= x(1-y^2)e^{-(x^2+y^2)/2} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0,\ x=\pm 1 \\ x=0,\ y=\pm 1 \end{cases}$$

Vi har att $f(-1,1) = f(1,-1) = -e^{-1}$, $f(-1,-1) = f(1,1) = e^{-1}$ samt $f(0,0) = 0$. Vi undersöker randen nu:

$$f(2\cos\theta, 2\sin\theta) = 4e^{-2}\cos\theta\sin\theta = 2e^{-2}\sin 2\theta = g(\theta),$$

så att

$$g'(\theta) = 4e^{-2}\cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4} + n2\pi.$$

Alltså, fås f:s största värde $f\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = 2e^{-2}$ respektive minsta värde $f\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = -2e^{-2}$

4. Vi har att $u = \ln x$ och $v = y - \ln x$. Detta ger att

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v}$$

och

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Blandade derivatan ges av

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{1}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Den nya ekvationen blir

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial v} = g(v) \Leftrightarrow z = H(u) + G(v) \Leftrightarrow z(x,y) = H(y - \ln x) + G(\ln x).$$

5. Kroppen K begränsas av övre ytan som är planet $2y - z + 3 = 0$ samt av nedre ytan som är en paraboloid $z = x^2 + y^2$. Kroppen har volymen

$$\iiint_K 1\, dzdxdy = \iint_{D_{xy}} \int_{z=x^2+y^2}^{z=2y+3} 1\, dzdxdy = \iint_{D_{xy}} (2y+3) - (x^2+y^2)\, dxdy,$$

där D_{xy} är kroppens projektion på xy-planet. Vi bestämmer D_{xy} genom att bestämma skärningsmängden mellan ytorna, dvs

$$x^2 + y^2 = 2y + 3 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 4.$$

Vi har alltså att $D_{xy} = \{(x,y):\ x^2 + (y-1)^2 = 4\}$. Med variabelbytet $x = 2\cos\theta$, $y = 1 + 2\sin\theta$, där $0 \le \theta \le 2\pi$ och $0 \le r \le 2$ samt funktionaldeterminanten r ges volymen hos kroppen K av

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} (2y+3) - (x^2+y^2)\, dxdy &= \iint_{D_{xy}} 4 - (x^2 + (y-1)^2)\, dxdy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^t (4 - r^2) r\, drd\theta = \frac{7\pi}{2} \text{ v.e.} \end{aligned}$$

6. Vi vill minimera avståndet $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ från en punkt (x,y,z) som ligger på ellipsoiden, dvs uppfyller $x^2 + y^2 + 2z^2 + x + 2y = 10$ till origo. Problemet kan då formuleras som att minimera funktionen

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{under villkoret} \qquad x^2 + y^2 + 2z^2 + x + 2y = 10.$$

Om vi löser ut $z^2 = 5 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x - y$ ur villkoret och sätter in det i f, så får vi

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 + y^2 + 5 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x - y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x - y + 5 \\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{35}{8} = g(x,y). \end{aligned}$$

Vi ser att $g(x,y) \ge \frac{35}{8}$ och att minimum $\frac{35}{8}$ fås för $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$ och $z = \pm\frac{5}{2\sqrt{2}}$ som löses ur villkoret.

Altenativt kan man söka stationära punkterna till g genom att lösa systemet:

$$g'_x(x,y) = x - \frac{1}{2} = 0 \qquad \text{och} \qquad g'_y(x,y) = y - 1 = 0.$$

Avståndet från ellipsoiden till origo är $\sqrt{\frac{35}{8}} = \frac{\sqrt{70}}{4}$ l.e.