LINKÖPINGS UNIVERSITET
ITN, Campus Norrköping
Univ lekt George Baravdish

Lösningaförslag till tentamen i Flervariabelanalys, TNIU73, 2005-08-16

---

1. Eftersom $z = f(1,3) = 18$, $f'_x(1,3) = 2$, $f'_y(1,3) = -4$, så ges ekvationen till yangentplanet av

$$z = 18 + 2(x-1) - 4(y-3) = 2x - 4y + 28.$$

2. (a) T.ex. så ger integration i x-led att

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=y} y\,xdydx = \frac{1}{8},$$

(b) $$\iint_D x\,dxdy = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}\int_{r=0}^{r=1} r^2\cos\theta\sin\theta\cdot r\,drd\theta = \frac{1}{16}.$$

3. Vi bestämmer först de stationära punkterna genom att lösa systemet

$$\begin{cases} f'_x(x,y) &= (1-2x(x+y))e^{-(x^2+y^2)} &= 0 \\ f'_y(x,y) &= (1-2y(x+y))e^{-(x^2+y^2)} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \pm x \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1/2 \\ x = y = -1/2 \end{cases}$$

Vi har att $f(1/2,1/2) = e^{-1/2}$ och $f(-1/2,-1/2) = -e^{-1/2}$. Rand undersökning

$$f(\cos\theta,\sin\theta) = (\cos\theta + \sin\theta)e^{-1} = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)e^{-1}$$

visar att största värde där är $\sqrt{2}e^{-1}$ för $\pi/4$ och minsta värde $\sqrt{2}e^{-1}$ för $3\pi/4$. Alltså ges f:s största och minsta värde på D av $f(1/2,1/2) = e^{-1/2}$ respektive $f(-1/2,-1/2) = -e^{-1/2}$.

4. Vi har att $u = x - y$ och $v = -x + 2y$. Detta ger att

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Vidare

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial u} + 2\frac{\partial z}{\partial v}$$

och

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Blandade derivatan ges av

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Den nya ekvationen blir

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial v} = g(u) \Leftrightarrow z = vg(u) + h(u) \Leftrightarrow z(x,y) = (-x+2y)g(x-y) + h(x-y).$$

5. Kroppen K begränsas av övre ytan $z = 6-x^2-7y^2-4x$ samt av nedre ytan $z = x^2+y^2$. Kroppen har volymen

$$\begin{aligned} V &= \iiint_K 1\, dzdxdy = \iint_{D_{xy}} \int_{z=x^2+y^2}^{z=6-x^2-7y^2-4x} 1\, dzdxdy \\ &= \iint_{D_{xy}} (6-x^2-7y^2-4x) - (x^2+y^2)\, dxdy = \iint_{D_{xy}} (8 - 2(x+1)^2 - 8y^2)\, dxdy \\ &= 8\iint_{D_{xy}} \left(1 - \left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + y^2\right)\right) dxdy, \end{aligned}$$

där D_{xy} är kroppens projektion på xy-planet. Vi bestämmer D_{xy} genom att bestämma skärningsmängden mellan ytorna, dvs

$$6 - x^2 - 7y^2 - 4x = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + y^2 = 1.$$

Vi har alltså att $D_{xy} = \{(x,y) : (x+1/2)^2 + y^2 = 1\}$. Med variabelbytet $x = -1+2r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, där $0 \le \theta \le 2\pi$ och $0 \le r \le 1$ samt funktionaldeterminanten $2r$ ges volymen hos kroppen K av

$$V = 8\iint_{D_{xy}} \left(1 - \left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + y^2\right)\right) dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)2r\, drd\theta = 8\pi \text{ v.e.}$$

6. Vi har att

$$\begin{aligned} I(a_0,a_1) &= \int_0^1 (e^x - a_0 - a_1 x)^2\, dx \\ &= \int_0^1 (e^{2x} + a_0^2 + a_1^2 x^2 - 2a_0 e^x - 2a_1 x e^x + 2a_0 a_1 x)\, dx \\ &= \frac{1}{2}(e^2-1) + a_0^2 + \frac{1}{3}a_1^2 - 2a_0(e-1) - 2a_1 + a_0 a_1 \qquad (*) \end{aligned}$$

Vi söker derivatans nollställen

$$\begin{cases} I'_{a_0} = 2a_0 + a_1 = 2(e-1) \\ I'_{a_1} = a_0 + \frac{2}{3}a_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -10+4e \\ a_1 = 18-6e \end{cases} \qquad (**)$$

I punkten (**) gäller att

$$I''_{a_0} = 2, \qquad I''_{a_1} = \frac{2}{3}. \qquad I''_{a_0 a_1} = 1.$$

Taylorsformel ger nu

$$I(a_0+h, a_1k) - I(a_0, a_1) = 2h^2 + 2hk + \frac{2}{3}k^2 + \text{restterm} = 2\Big(h + \frac{1}{2}k\Big)^2 + \frac{1}{6}k^2 + \text{restterm} \geq 0.$$

Detta visar att punkten (**) är en minpunkt. I:s minsta värde fås om vi sätter in punkten (**) i uttrycket (*).